UNIVERSITE PAUL SABATIER
L1 PCP

Année Universitaire 2009 -2010
Lundi 8 mars 2010

Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices est interdit.
(durée : 45 minutes)

22

NOM :	Prénom :	Groupe :	*Note (/20) :*

De nombreuses questions sont indépendantes, et des résultats intermédiaires sont donnés, de manière à pouvoir continuer le sujet, sans être bloqué.

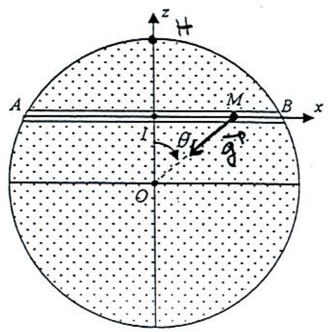
Sujet inspiré de l'exercice 2 du sujet de mécanique partie I Session 2004

La Terre est assimilée à une sphère homogène de centre O, de rayon R et de masse M_T. Soit g_o la valeur de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.

Dans tout l'exercice, on ne tiendra pas compte de la rotation de la Terre : le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen.

On relie deux villes A et B par un tunnel rectiligne de longueur $AB = d$. Un train, assimilable à un point matériel M se déplace sans frottement dans le tunnel (Figure ci-dessous). On note r la distance OM et I le point milieu de AB. Le train part de A avec une vitesse initiale nulle, et arrive en B au bout d'un temps t_{AB}.

On associe au tunnel le référentiel $\Re = (I, xyz)$, tel que représenté ci-dessous, et, on note x l'abscisse de M dans $\Re$, et θ l'angle d'inclinaison de $\overline{OM}$ par rapport à $\overline{e_z}$.



1- Qu'est-ce que le référentiel géocentrique ? Quel est la différence avec $\Re$?

0,5 ↳ centre en O (centre de la Terre), direction = 3 ét. fixes.

0,5 Diff. avec $\Re$ = le centre ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ peuvent être considérés ĉ étant simplement 1 nvelle base d'explicitation, car fixes / R_0).

2- Donner la définition d'un référentiel galiléen.

1 Réf en translation rectiligne et uniforme / Réf. de Copernic (Réf. Absolu).

3- Enoncer le théorème de Gauss en mécanique du point. On précisera le nom de toutes les variables introduites.

2 $\oiint_{(S)} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \vec{n}(M)\, dS = -4\pi G M_{int}$

Masse contenue ds (S)
↳ cte de gravitation
↳ Champ de gravitation.
↳ Surface fermée de normale (extérieure) $\vec{n}$.

4- Montrer qu'on peut en déduire que le champ de gravitation terrestre peut s'écrire, en un point M intérieur à la Terre, sous la forme $\overline{\mathcal{G}} = -M_T G \frac{r}{R^3}\overline{e_r}$, dans laquelle on définira le vecteur $\overline{e_r}$. G est la constante universelle de gravitation.

2 * Symétrie sphérique ⇒ ts les plans ∋ O et M sont des π^+. $\vec{\mathcal{G}}$ polaire ⇒ $\vec{\mathcal{G}} \in \pi^+$ ⇒ $\vec{\mathcal{G}}$ ∈ à l'intersection de ts les plans ∋ O et M ⇒ $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(M)\vec{e_r}$

Inv du syst. ($\mathcal{D}$, M) par rot. d'angle φ ou θ $\overset{P.C}{\Longrightarrow}$ $\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{\mathcal{G}}(r)$.

* (S) = sphère de centre O, de rayon r ⇒ $\vec{n}(M) = \vec{e_r}$.

⇒ $\oiint_{(S)} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \mathcal{G}(r) \cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r)$.

* Th. Gauss ⇒ $4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_{int} = -4\pi G \frac{M_T \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ $\boxed{\text{CQFD}}$

5- Donner la définition du champ de pesanteur terrestre, et expliquer pourquoi on peut confondre champ de pesanteur terrestre $\overline{g}$ et champ de gravitation terrestre $\overline{\mathcal{G}}$.

2 * $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}} + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$ ($\vec{P} = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ie}$)
↳ dû à la rotation de la Terre.

* Comparaison des normes ⇒ $\alpha = (\vec{g}, \vec{\mathcal{G}}) < 5'$ ⇒ $\vec{g} \cong \vec{\mathcal{G}}$

6- Déduire des questions 4 et 5 l'expression du champ de pesanteur terrestre $\overline{g_o}$ à la surface terrestre en fonction de M_T, G et R^2.

1 $\vec{g} \cong \vec{\mathcal{G}} = -M_T G \frac{r}{R^3}\vec{e}_r$ ⇒ $\vec{g}_0 = \vec{g}(r=R) = -M_T \frac{G}{R^2}\vec{e}_r$.

7- Quelle est l'expression, en fonction de $\overrightarrow{g_o}$, du champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ en un point M quelconque intérieur à la Terre ? Le représenter sur la figure.

1 $\vec{g} = -M_T G \frac{r}{R^2 R} \vec{e}_r = \frac{r}{R} \vec{g_0}$

8- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans $\mathfrak{R}$.

1 $\sum \vec{F}(M/R) = \vec{P} + \vec{R}$

9- On rappelle que si le point se déplace sans frottement, alors la réaction du support sur M est perpendiculaire à sa trajectoire. Projeter la relation précédente (question 8) suivant la direction Ix, et donner alors l'équation du mouvement de M, en fonction des seuls paramètres x, R et . g_o

3 $\vec{R} = R_z \vec{e}_z + R_y \vec{e}_y$ 0,5 $(\perp Ix)$, $g = \frac{r}{R} g_0 = \frac{x}{R \sin\theta} g_0$ 0,5

$\vec{P} \cdot \vec{e}_x = -mg \sin\theta$ 0,5 $\Big\}$ RFD $\Rightarrow -mg\sin\theta = m\ddot{x}$ et $r = \frac{x}{\sin\theta}$ 0,5

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{g_0}{R} x = 0$ 1

10- Déduire de la question 9 l'expression $x(t)$ de la variation de x en fonction du temps t, et préciser la période du mouvement de M.

$\omega^2 = \frac{g_0}{R} \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. 0,5

3 $x(0) = -\frac{d}{2}$ 0,5 $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ 0,5 $\Big\} \Rightarrow x(t) = -\frac{d}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}}\, t\right)$ 0,5

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$ 0,5 0,5

11- Déterminer alors la durée t_{AB} du trajet AB en fonction de g_o et R.

$x(t_{AB}) - x(0) = d = -\frac{d}{2}\cos(\omega t_{AB}) - \left(-\frac{d}{2}\right)$

1 $\Leftrightarrow \cos\omega t_{AB} = -1 \Leftrightarrow \omega t_{AB} = \frac{2\pi}{T} t_{AB} = \pi$

$\Rightarrow t_{AB} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

12- Quelle est l'expression de la vitesse maximale V_{max} du train en fonction de d, g_o et R ?

1 $\dot{x}(t) = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g_0}{R}} \sin\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}}\, t\right)$ max si $\sin = +1$.

$\Rightarrow V_{max} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g_0}{R}}$

13- Application numérique : on se propose de relier de cette manière deux villes distantes de $AB = 400$ km. On prendra $R = 6400$ km , $g_o = 10$ m.s^{-2}, et on approximera $\pi = 3{,}1$.

a) Calculer la profondeur maximale p du tunnel à construire. On prendra : $\sqrt{64^2 - 4} = 63{,}97$.

$p = HI$ (H = voir schéma).

1 $p = R - OI = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

$= \left(64 - \sqrt{64^2 - 2^2}\right) \cdot 10^2$.

$= (64 - 63{,}97) \cdot 10^2 = 3$ km

b) Donner, en minutes, la valeur approchée de la durée du trajet AB.

$t_{AB} = \pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} = 3{,}1\sqrt{\frac{6400 \cdot 10^3}{10}} = 3{,}1 \cdot 8 \cdot 10^2 = 2480$ s.

1 $2480 \div 60 = 41$, reste 2 $\Rightarrow t_{AB} \simeq 40'$.

c) Calculer la vitesse maximale V_{max} du train en km.h^{-1}.

1 $V_{max} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g_0}{R}} = 200\sqrt{\frac{10}{64 \cdot 10^5}} = \frac{200}{8 \cdot 10^2} = 0{,}25$ km . s^{-1}

p km

$\Rightarrow V_{max} = 0{,}25 \times 3600 = \frac{1}{4} \times 3600 = 900$ km . h^{-1}